

លំហាត់

(25 pt) គេធ្វើពិធីចែករង្វាន់ជាមេដាយដល់កីឡាករក្នុងថ្ងៃបន្តបន្ទាប់ ។ មេដាយទាំងអស់មានចំនួន x មេដាយ ($x > 1$)

- ថែកក្នុងរយៈពេល N ថ្ងៃ ។
- ថ្ងៃទី 1 ថែកមេដាយ 1 បន្ថែមនឹង $\frac{1}{7}$ នៃ $(x-1)$ ជាមេដាយសល់ថ្មី
- ថ្ងៃទី 2 ថែកមេដាយ 2 បន្ថែមនឹង $\frac{1}{7}$ នៃ មេដាយសល់ថ្មី
- គេថែករបៀបនេះរហូតដល់ថ្ងៃទី N , នៅថ្ងៃទី N មេដាយត្រូវអស់ល្មម ។
- តាង r_n ជាចំនួនមេដាយសល់ពីការថែកថ្ងៃទី N , r_0 ជាចំនួនមេដាយពុំទាន់ថែក គឺ $r_0 = x$ ។
- ក- បង្ហាញថា: $r_n = \frac{6}{7}(r_{n-1} - n)$
- ខ- ចូរស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនង: $x = \frac{7^N}{6^{N-1}}(N - 6) + 36$
- គ- ចូររកចំនួនមេដាយ x និងរយៈពេលថែក ។

ដំណោះស្រាយ

ក- បង្ហាញថា: $r_n = \frac{6}{7}(r_{n-1} - n)$

តាមសម្មតិកម្ម នៅថ្ងៃទី n ថែកមេដាយចំនួន n បន្ថែមនឹង $\frac{1}{7}$ នៃមេដាយសល់ពីថ្ងៃទី $(n-1)$
ដោយ r_n ជាចំនួនមេដាយសល់ពីការថែកថ្ងៃទី N នោះ r_{n-1} ជាចំនួនមេដាយសល់ពីការថែកថ្ងៃទី $N-1$
យើងបាន

$$\begin{aligned} \text{ចំនួនមេដាយដែលថែកថ្ងៃទី } N \text{ គឺ: } & n + \frac{1}{7}(r_{n-1} - n) \\ \text{ចំនួនមេដាយសល់បន្ទាប់ពីថែកថ្ងៃទី } N \text{ គឺ: } & r_n = r_{n-1} - \left(n + \frac{1}{7}(r_{n-1} - n) \right) \\ \Leftrightarrow r_n = r_{n-1} - n - \frac{1}{7}(r_{n-1} - n) = & \frac{6}{7}(r_{n-1} - n) \end{aligned}$$

ដូចនេះ $r_n = \frac{6}{7}(r_{n-1} - n)$

ខ- ចូរស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនង: $x = \frac{7^N}{6^{N-1}}(N - 6) + 36$

តាមសំរាយខាងលើ: $r_n = \frac{6}{7}(r_{n-1} - n)$

ចំពោះ $n=1; 2; 3; \dots; n$ យើងបាន

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{6}{7}(r_0 - 1) \\ r_2 &= \frac{6}{7}(r_1 - 2) = \frac{6}{7}\left(\frac{6}{7}(r_0 - 1) - 2\right) \\ r_3 &= \frac{6}{7}(r_2 - 3) = \frac{6}{7}\left(\frac{6}{7}\left(\frac{6}{7}(r_0 - 1) - 2\right) - 3\right) \\ &\dots\dots\dots \\ r_n &= \frac{6}{7}(r_{n-1} - n) = \frac{6}{7}\left(\underbrace{\frac{6}{7}\left(\frac{6}{7}\left(\dots\frac{6}{7}(r_0 - 1) - 2\right) - 3\right) - \dots}_{n} - n\right) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow r_n = \left(\frac{6}{7}\right)^n r_0 - \left(\frac{6}{7}\right)^n - 2 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1} - 3 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^{n-2} - \dots - n \cdot \left(\frac{6}{7}\right)$$

$$\Leftrightarrow r_n = \left(\frac{6}{7}\right)^n r_0 - \left(\frac{6}{7}\right)^n \left(1 + 2 \cdot \left(\frac{7}{6}\right) + 3 \cdot \left(\frac{7}{6}\right)^2 + \dots + n \cdot \left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}\right) \quad (1)$$

ដោយ $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

នាំអោយ: $1' + x' + (x^2)' + (x^3)' + \dots + (x^n)' = \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)'$

$$\Leftrightarrow 0 + 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} = \frac{-(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

ជំនួស $x = \frac{7}{6}$ យើងបាន

$$1 + 2 \cdot \frac{7}{6} + 3 \cdot \left(\frac{7}{6}\right)^2 + \dots + n \cdot \left(\frac{7}{6}\right)^{n-1} = \frac{n \cdot \left(\frac{7}{6}\right)^{n+1} - (n+1) \left(\frac{7}{6}\right)^n + 1}{\left(1 - \frac{7}{6}\right)^2}$$

$$= \left(n \cdot \left(\frac{7}{6}\right)^{n+1} - n \cdot \left(\frac{7}{6}\right)^n - \left(\frac{7}{6}\right)^n + 1\right) \times 36$$

$$(1) \Rightarrow r_n = \left(\frac{6}{7}\right)^n \left[r_0 - 36 \cdot \left(n \cdot \left(\frac{7}{6}\right)^{n+1} - n \cdot \left(\frac{7}{6}\right)^n - \left(\frac{7}{6}\right)^n + 1\right) \right]$$

តែ $r_0 = x; r_n = 0$ (ព្រោះបន្ទាប់ពីថ្ងៃទី N មេដាយមិនមាននៅសល់ទៀតទេ) យើងបាន

$$\left(\frac{6}{7}\right)^n \left[x - 36 \cdot \left(n \cdot \left(\frac{7}{6}\right)^{n+1} - n \cdot \left(\frac{7}{6}\right)^n - \left(\frac{7}{6}\right)^n + 1\right) \right] = 0$$

$$\Rightarrow x = 36 \cdot \left(\frac{7}{6}\right)^n \left(n \cdot \frac{7}{6} - n - 1\right) + 36 = 36 \cdot \left(\frac{7}{6}\right)^n \cdot \frac{n-6}{6} + 36 = \frac{7^n}{6^{n-1}}(n-6) + 36$$

ដោយ $n=N$ យើងបាន

$$x = \frac{7^N}{6^{N-1}}(N-6) + 36$$

គ-ចូររកចំនួនមេដាយ x និងរយៈពេលថែក

តាមសំរាយបញ្ជាក់ខាងលើយើងមាន: $x = \frac{7^N}{6^{N-1}}(N-6) + 36$

តាមរយៈទំនាក់ទំនងនេះយើងសង្កេតឃើញថា $\frac{7^N}{6^{N-1}}$ មិនអាចក្លាយជាចំនួនគត់ទេ ហើយ 6^{N-1} មិនអាចជា

តួចែកដាច់របស់ $(N-6) \forall N \in \mathbb{N}$ ហើយក៏មិនអាចជាតួចែកដាច់នៃ $7^N \forall N \in \mathbb{N}$ ដែរ ។

ដើម្បីអោយ x ជាចំនួនគត់លុះត្រាតែ:

$$N - 6 = 0 \Rightarrow N = 6$$

នាំអោយ $x=36$

ដោយ x តំណាងអោយចំនួនមេដាយ ហើយ N ជាចំនួនថ្ងៃចែកមេដាយ

ដូចនេះ

ចំនួនមេដាយគឺ 36 និងចំនួនថ្ងៃត្រូវចែកមេដាយនោះអស់គឺ 6 ថ្ងៃ
--